5C-44

Lineare Algebra II: Klausur 1

Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

Sommersemester 2022

- **Die Klausur dauert 2 Stunden. Sie besteht aus 6 Aufgaben. Pro Aufgabe sind 10 Punkte zu erwerben.**
- Öffnen Sie den Klausurbogen erst, wenn der Klausurbeginn angesagt wurde!
- Es sind keine Hilfsmittel (Taschenrechner, Mitschriften, Notizen, Telefonjoker etc.) außer mechanischen Armbanduhren und Weckern zugelassen.
- Bitte prüfen Sie die folgenden Angaben und korrigieren Sie sie gegebenenfalls:

  Name:
  Matrikelnr.:

  Bitte legen Sie Ihren Studierendenausweis und Ihren Lichtbildausweis vor sich auf das Pult, damit Ihre Identität während der Klausur geprüft werden kann.
- Sie dürfen die einzelnen Blätter dieses Bogens zur Bearbeitung der Klausur trennen, solange Sie den folgenden Punkt beachten. Wenn Sie zusätzliche lose Seiten benötigen, geben Sie uns bitte ein Zeichen.
- Bearbeiten Sie die Aufgaben jeweils auf den dafür vorgesehenen Seiten. Machen Sie auf jeder losen Seite klar erkenntlich, welche Aufgabe Sie lösen. Niederschriften, die nicht klar zugeordnet sind, werden nicht korrigiert.
- Fragen können Sie nur schriftlich stellen. Geben Sie uns dazu ein Zeichen. Wenn wir Ihre Frage zulassen, werden wir sie laut vorlesen und beantworten.
- Bitte lassen Sie Ihre Klausur am Ende der Bearbeitungszeit an Ihrem Sitzplatz liegen. Sie können einzelne Klausurbögen mit „bitte nicht werten“ kennzeichnen, aber nicht mitnehmen. Die Klausuraufgaben werden wir veröffentlichen.

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	$\sum$
Punkte							/60

Aufgabe 1

Gegeben ist die folgende reelle symmetrische Matrix:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 10 \end{pmatrix}$$

Wir schreiben β_A für die assoziierte symmetrische Bilinearform.

(a) Berechnen Sie

$$\beta_A(\begin{pmatrix} -2 \\ -2/3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -2/3 \\ 1 \end{pmatrix}).$$

(b) Bestimmen Sie mit Hilfe des Gram-Schmidt-Orthonormalisierungsverfahrens eine Basis von $\mathbb{R}^3$, in der β_A durch die Einheitsmatrix gegeben ist.

Sie dürfen in Teil (b) das Ergebnis aus Teil (a) verwenden.

Notieren Sie hier Ihre Lösung:

Aufgabe 2

(a) Seien a, b und c Elemente eines Integritätsrings. Definieren Sie, was es bedeutet, dass c ein *größter gemeinsamer Teiler* von a und b ist.

(b) Bestimmen Sie einen größten gemeinsamen Teiler $C \in \mathbb{R}[X]$ der folgenden beiden reellen Polynome:

$$A := X^5 + X^2 + X + 1$$
$$B := X^5 + 1$$

Sind die beiden Polynome teilerfremd?

(c) Bestimmen Sie reelle Polynome P und Q, sodass für die Polynome A, B und C aus Teil (b) gilt:

$$PA + QB = C.$$

Notieren Sie hier Ihre Lösung:

Aufgabe 2
(Seite 7)

Aufgabe 3

(a) Formulieren Sie die aus der Vorlesung bekannte Bedingung an das charakteristische Polynom einer Matrix, unter der die Matrix eine Jordannormalform besitzt.

(b) Berechnen Sie zu jeder der folgenden reellen Matrizen das charakteristische Polynom und das Minimalpolynom.

$$A = \begin{pmatrix} 11 & -4 \\ 25 & -9 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

(c) Geben Sie zu jeder Matrix in (b) an, ob eine Jordannormalform über $\mathbb{R}$ existiert, und geben Sie gegebenenfalls auch eine solche Jordannormalform an.

Notieren Sie hier Ihre Lösung:

Aufgabe 3
(Seite 13)

Aufgabe 4
Gegeben ist die folgende reelle Matrix:

$$A := \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

(a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom χ_A und das Minimalpolynom μ_A von A.

(b) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von A.

(c) Berechnen Sie zu jedem Eigenwert a den Hauptraum $\mathrm{Hau}(A; a)$.

(d) Bestimmen Sie eine Jordanbasis von $\mathbb{R}^n$ für A. Geben Sie ferner die zugehörige Jordannormalform $\hat{A}$ von A an.

Notieren Sie hier Ihre Lösung:

Aufgabe 5

Kreuzen Sie in den folgenden sieben Aufgabenteilen alle Aussagen an, die richtig sind.

Es ist pro Aufgabenteil mindestens eine *Aussage richtig. Manchmal sind* mehrere *Aussagen richtig. Als Gesamtpunktzahl erhalten Sie die Differenz aus der Anzahl aller richtig gesetzten Kreuze und aller falsch gesetzten Kreuze, mindestens aber 0 Punkte und höchstens 10 Punkte.*

---

(1) Ein Endomorphismus f eines endlich-dimensionalen Vektorraums V ist *genau dann* diagonalisierbar, wenn gilt:

☐ Das Minimalpolynom von f zerfällt in paarweise verschiedene Linearfaktoren.

☐ Das Minimalpolynom von f stimmt bis auf ein Vorzeichen mit dem charakteristischen Polynom von f überein.

☐ Das charakteristische Polynom von f zerfällt in paarweise verschiedene in Linearfaktoren.

(2) Sei f ein Endomorphismus eines endlich-dimensionalen Vektorraums V mit Minimalpolynom $\mu_f = (X-a)^m \cdot P(X)$, wobei $m \geq 1$ und P ein zu $X-a$ teilerfremdes Polynom ist. Dann gilt:

☐ a ist ein Eigenwert von f.

☐ $P(a) = 0$.

☐ Der Eigenraum $\mathrm{Eig}(f;a)$ hat Dimension m.

(3) Welche der folgenden Matrizen definieren ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$?

☐ $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

(4) Für eine **Isometrie** $f\colon V \to V$ eines euklidischen Vektorraums V gilt:

☐ Alle Eigenwerte haben Betrag 1.

☐ Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten stehen senkrecht zueinander.

☐ f ist diagonalisierbar.

(5) Für jede reelle symmetrische Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times n)$ gilt:

☐ A ist diagonalisierbar.

☐ Alle Eigenwerte von A sind positiv.

☐ Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten von A stehen senkrecht zueinander (bezüglich des Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$).

(6) Die folgenden Ringe sind Integritätsringe:

☐ $\mathbb{Z}[X,Y] := (\mathbb{Z}[X])[Y]$ (Polynomring in zwei Variablen)

☐ $\mathbb{Z}/22\mathbb{Z}$

☐ $\mathbb{C}$

(7) Sei V ein endlich-dimensionalre Vektorraum, und U ein Untervektorraum, und $i\colon U \to V$ die Inklusion. Für die Dualräume V^* und U^* gilt:

☐ $\dim(U^*) = \dim U$

☐ $\dim(U^*) = \dim(V)$ und $\dim(U) = \dim(V^*)$.

☐ Die Abbildung $i^*\colon V^* \to U^*$ ist injektiv.

Aufgabe 5

Aufgabe 6
Sei K ein Körper, n eine natürliche Zahl.

(a) Definieren Sie, was es für eine Matrix $N \in \mathrm{Mat}_k(n \times n)$ bedeutet, *nilpotent* zu sein.

(b) Geben Sie alle nilpotenten 1×1-Matrizen über K an. Begründen Sie Ihre Antwort.

(c) Gilt im Allgemeinen, also für beliebige K und n und für beliebige nilpotente Matrizen $N_1, N_2 \in \mathrm{Mat}_K(n \times n)$, die Gleichheit $N_1 N_2 = N_2 N_1$? Begründen Sie Ihre Antwort.

(d) Seien $N_1, N_2 \in \mathrm{Mat}_K(n \times n)$ zwei nilpotente Matrizen, für die gilt $N_1 N_2 = N_2 N_1$. Zeigen Sie, dass sowohl $N_1 N_2$ als auch $N_1 + N_2$ nilpotent sind.

Sie können jeden Satz der Vorlesung ohne Beweis verwenden, sofern Sie ihn separat in seiner allgemeinen Form (d. h. unabhängig von der vorliegenden Aufgabenstellung) wiedergeben.

Notieren Sie hier Ihre Lösung: